Problema I (10 puncte)

Diferite pendule

Un corp de masă M care se poate deplasa pe o traiectorie liniară, supus acțiunii unei forțe elastice de revenire cu modulul $F = -k \cdot x$ (în care x este distanţa faţă de poziţia de echilibru) are o mișcare oscilatorie armonică; pulsația acestei oscilații este $\sqrt{k/M}$. Într-o astfel de mișcare, elongația – distanța instantanee față de poziția de echilibru - variază armonic.
Analog, un corp care se poate deplasa pe o traiectorie circulară, supus acțiunii momentului de revenire $\mu = -\kappa \cdot \alpha$ al unei forțe, are o mișcare oscilatorie armonică; pulsația acestei oscilații este $\sqrt{\kappa/j}$. Pentru un punct material având masa m și distanţa r față de axul de rotație, momentul de inerţie j are expresia $j = m \cdot r^2$. În situaţia mişcării pe traiectorie circulară mărimea care variază armonic este elongația unghiulară α - unghiul la centru pe care îl face vectorul de poziţie al corpului în poziția curentă cu cel corespunzător poziției de echilibrul. Ca şi masa, momentul de inerţie este o mărime aditivă.

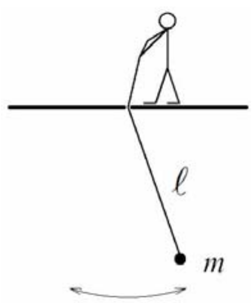
A. Pendul cu lungime variabilă

Un pendul gravitaţional având masa m şi lungimea ℓ_0 oscilează cu amplitudinea unghiulară $\Phi(\ell_0)$, astfel încât $\Phi(\ell_0) << 1rad$. Consideră că faza inițială a mişcării este nulă şi că acceleraţia gravitaţională este $\vec{g}$.

a. Scrie expresia dependenţei de timp a elongaţiei unghiulare $\varphi(t)$ şi a vitezei unghiulare $\Omega(t)$ a pendului gravitaţional.

b. Determină expresia pentru valoarea medie în timp a tensiunii din firul pendulului gravitaţional.

c. Se creşte lent lungimea pendulului (vezi figura alăturată), astfel încât pe toată durata acestui proces amplitudinea unghiulară $\Phi(\ell)$ respectă condiţia $\Phi(\ell) << 1rad$. Determină variaţia relativă a amplitudinii unghiulare $\dfrac{\Delta\Phi}{\Phi(\ell)}$ în cursul acestui proces. Exprimă rezultatul în funcţie de lungimea ℓ a pendulului la un moment dat şi de variaţia $\Delta\ell$ a lungimii acestuia.



Indicaţie: Pentru soluţionarea punctului c poţi utiliza considerente energetice şi poţi folosi o expresie a valorii medii în timp a tensiunii de tipul celei stabilite la punctul b.

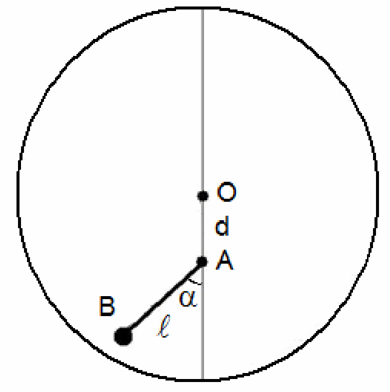
Notă: Dacă îţi sunt utile, poţi folosi următoarele informaţii:

- *În aproximaţia de ordinul 2, pentru unghiuri mici, dar nu foarte mici:* $\cos\alpha \cong 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$
- *Valoarea medie pe o perioadă a funcţiei* $\cos^2\alpha$ *este:* $\langle \cos^2\alpha \rangle = \dfrac{1}{2}$

B. Pendul învârtit

Un disc cu raza R dispus orizontal se roteşte cu viteza unghiulară constantă Ω în jurul axei verticale proprii fixe ce trece prin punctul O din figura alăturată. La distanţa d față de centrul discului este prins un alt ax vertical, solidar cu discul și care trece prin A.

O bară rigidă AB, de masă neglijabilă şi lungimea $\ell < R-d$ se poate roti în plan orizontal, pe faţa discului, fără frecare. Bara se rotește faţă de axul vertical ce trece prin A. La celălalt capăt al barei se află un corp sferic cu rază r foarte mică ($r << \ell$) şi de masă m.



a. Determină expresia momentului forţei care acţionează asupra barei față de axul ce trece prin punctul A, în situația când aceasta este înclinată cu unghiul α ($\alpha << 1 rad$) față de direcția OA. Consideră că pentru unghiuri α foarte mici $\sin\alpha \cong \alpha$ și $\cos\alpha \cong 1$.

b. Determină expresia perioadei micilor oscilaţii ale barei. (Bara AB oscilează cu amplitudinea unghiulară α foarte mică).

c. Pe bară, sunt dispuse $n+1$ corpuri sferice de raze foarte mici şi de aceaşi masă m. Două dintre corpurile sferice sunt fixate în cele două capăte ale barei, iar celelalte sunt fixate echidistant pe bară (la distanţe ℓ/n). În aceste condiții, determină expresia momentului forţei care acţionează asupra barei față de axul care trece prin A, în situația când ea este înclinată cu unghiul α faţă de direcţia OA.

d. Determină expresia perioadei micilor oscilaţii ale barei cu cele $n+1$ corpuri sferice foarte mici.

Dacă îţi sunt utile, poţi folosi sumele $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

Problema a II-a (10 puncte)

Curenți radiali

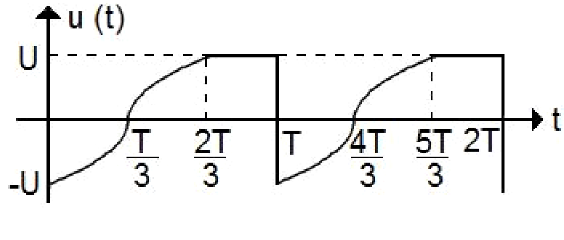
A. Pentru placarea cu argint a pereţilor unui vas semisferic de cupru cu raza R, acesta se umple cu un lichid electrolitic având echivalentul electrochimic κ. În centrul sferei din care este decupat vasul se plasează un electrod sferic de argint cu raza r $(r << R)$. Concentraţia ionilor din soluţie nu variază în cursul electrolizei. Dacă între electrodul central şi peretele vasului se aplică o diferenţă de potenţial U, atunci pe peretele acestuia apare o depunere de argint. Dacă sensul de polarizare este inversat, ionii din soluţie circulă în sens opus şi peretele vasului semisferic este corodat. În electrolitul din vas ionii circulă radial.

a. La aplicarea tensiunii electrice U în timpul T argintul depus pe suprafaţa vasului semisferic de rază R are masa m. Determină masa argintului depus pe pereţii unui alt vas semisferic cu raza $2R$, dacă se foloseşte acelaşi electrolit. Densitatea curentului de electroliză şi timpul de depunere nu se schimbă. Exprimă rezultatul în funcție de m.

b. Vasul semisferic este umplut cu electrolit cu ajutorul unui furtun dielectric având lungimea L şi aria secţiunii transversale S. Determină rezistenţa electrică a electrolitului, măsurată între capetele furtunului. Exprimă rezultatul în funcție de R, κ, U, T, L, m și S.

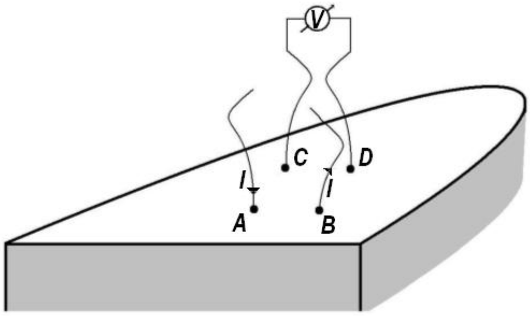
c. Diferenţa de potenţial aplicată între peretele vasului semisferic şi electrodul central variază periodic în timp după legea

$$u(t) = \begin{cases} -U\cdot\sqrt{1-3t/T} & \text{pentru } 0 \le t \le T/3 \\ U\cdot\sqrt{3t/T-1} & \text{pentru } T/3 < t < 2T/3 \\ U & \text{pentru } 2T/3 \le t \le T \end{cases}$$



Graficul dependenței $u(t)$ este prezentat în figura alăturată. Determină valoarea efectivă a diferenţei de potenţial aplicată între peretele vasului semisferic şi electrodul central. Exprimă rezultatul în funcție de U.
d. Determină expresia masei stratului de argint depus în timpul $n \cdot T$ pe peretele vasului semisferic de rază R. Exprimă rezultatul în funcție de masa m și de numărul natural n, foarte mare.

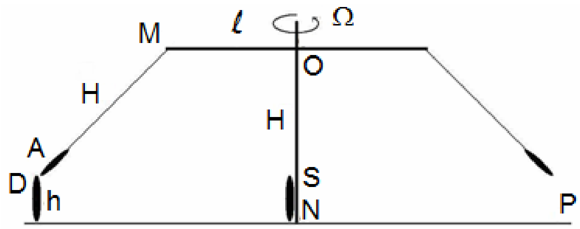
B. O placă dintr-un material semiconductor este suficient de groasă şi are aria atât de mare încât se poate considera că ocupă complet un semispaţiu. Pe suprafaţa liberă a plăcii, în vârfurile unui pătrat cu latura $a = 1\,cm$ sunt plasate patru contacte electrice, marcate în figura alăturată cu literele A, B, C şi D. Prin contactele A şi B intră şi respectiv iese un curent electric cu intensitatea $I = 1\,mA$. Voltmetrul legat între contactele electrice C şi D indică diferenţa de potenţial $U = 5{,}6\,V$.
Determină valoarea rezistivităţii electrice a materialului plăcii.



Problema a III-a (10 puncte)

Carusel cu muzică

Elevii de la liceul de muzică s-au dus în parcul de distracţii. Andrei şi alţi băieţi din clasă au decis să se dea în carusel.
În figura alăturată este reprezentat schematic caruselul în rotaţie. „Pălăria” caruselului are raza $MO = \ell$, iar înălţimea la care se află este $ON = H$. Lungimea lanţurilor de care sunt legate scaunele este $MA = H$.
Andrei are un fluier care emite tot timpul nota *„la”*. Diana, a cărei înălţime este h stă astfel încât scaunele caruselului în rotaţie staţionară trec exact prin dreptul capului său. Pentru că este o elevă bună la fizică, Diana îşi pune următoarele întrebări.



a. Care este viteza unghiulară a caruselului?
b. Sunt scaunele şi lanţurile dispuse pe o pânză de con circular drept ?
c. Care este perioada micilor oscilaţii (produse în cursul rotirii caruselului) ale scaunelor pe care copiii stau în carusel, presupunând că ansamblul scaun-copil poate fi considerat punct material?
d. Care este nota cu frecvența cea mai mare - corespunzătoare sunetului cel mai acut pe care îl aude Diana? Care este nota cu frecvența cea mai mică - corespunzătoare sunetului cel mai grav pe care îl aude Diana? La ce distanță față de Diana se află Andrei, atunci când fluierul său emite sunetul pe care Diana îl percepe ca fiind cel mai acut, respectiv cel mai grav?
e. Care este nota cu frecvența cea mai mare şi nota cu frecvența cea mai mică pe care le percepe supraveghetorul caruselului, ascultând fluierul lui Andrei. Supraveghetorul are înălţimea $SN = h$ şi stă foarte aproape de axul de rotaţie verticală a caruselului.
f. Supraveghetorul îi spune Dianei că este periculos să rămână atât de aproape de carusel şi-i cere să se depărteze. Noua distanţă faţă de axul caruselului la care se află Diana este de două ori mai mare decât cea anterioară. Ea constată că există o poziţie a lui Andrei pentru care aude sunetul cel mai acut. Care este această poziţie şi care este nota pe care o aude Diana.
Răspunde la întrebările Dianei. Justifică fiecare răspuns.

- *Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.*
- *În cadrul unui subiect, elevul poate să rezolve cerințele în orice ordine.*
- *Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.*
- *Elevii pot utiliza calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.*
- *Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma punctajelor acordate pentru cele trei subiecte.*

Consideră că valoarea accelerației gravitaționale este $g = 10{,}0\,m \cdot s^{-2}$, că viteza sunetului în aer este $c = 300\,m \cdot s^{-1}$, că $h = 2{,}00\,m$, $H = 20{,}0\,m$, $\ell = 21{,}3\,m$. Presupune că lanţurile sunt fire ideale, fără masă. Dacă ıți este necesar poți utiliza datele din tabelul de mai jos în care sunt precizate frecvenţele unor note muzicale.

Notă	Do	Do♯	Re	Re♯	Mi	Fa	Fa♯	Sol	Sol♯	La	La♯	Si
f(Hz)	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494

În exprimarea lungimilor păstrează precizia la nivelul decimetrului. În calcule operează păstrând trei cifre semnificative.
În răspunsurile pe care le dai, denumeşte nota cu frecvenţa cea mai apropiată de frecvenţa pe care ai determinat-o.

Subiect propus de:

Delia DAVIDESCU – Centrul Naţional pentru Evaluare şi Examinare – Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea Bucureşti
Ioan POP – Colegiul Naţional „ M Eminescu” – Satu Mare